LYCEE SUGER

ENTREE EN TERMINALE S
LIVRET DE REVISION DE MATHEMATIQUES

CHAPITRE N°0.

Quelques rappels sur les tableaux de signes et l'étude de fonctions.

I. TABLEAUX DE SIGNES ET INÉQUATIONS.

1. Inéquation produit

Exercice 1 :

Résoudre dans IR les inéquations ci-dessous. Contrôler les réponses sur une calculatrice graphique.

$(5x+2)\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{4}\right) \geq 0$; **2°)** $(3x+2)(x-6)(4-x) \geq 0$; **3°)** $-5x(4x^2-9) > 0$

4°) $(x+1)^2 < (2x-5)^2$

Développer mène ici à chaque fois à une impasse en classe de seconde.

Une stratégie de résolution

1. On se ramène à une comparaison à 0, c'est à dire que l'on écrit l'inéquation, par exemple, sous la forme $f(x) < 0$.

2. On factorise ensuite $f(x)$

3. On étudie le signe de $f(x)$ à l'aide d'un tableau de signes. Pour chaque facteur de la forme $ax+b$ on détermine les valeurs charnières en résolvant ax +b = 0.

On réalise le tableau de signes, en prenant bien soin de ranger les valeurs charnières dans l'ordre croissant, puis on place les 0 et ensuite on met **le signe de a à droite du 0**

4. On donne l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions est S =

5. On teste éventuellement la réponse

2. Inéquation quotient

Exercice 2 :

Résoudre dans IR les inéquations ci-dessous. Contrôler les réponses sur une calculatrice graphique.

$\frac{5-7x}{5x+2} \geq 0$; $\frac{5x-3}{4-9x^2} \geq 0$; $\frac{2x-3}{5-x} \leq \frac{4}{3}$; $\frac{2x-3}{4} < \frac{4}{2x+3}$; $\frac{2x-3}{4} \geq \frac{-4}{2x+3}$

Une stratégie de résolution :

1. On cherche les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x pour lesquelles les dénominateurs sont nuls.

2. On se ramène à une comparaison à 0.

3. On réduit au même dénominateur en prenant le plus petit dénominateur commun.

Ne pas oublier qu'un trait de fraction joue le rôle d'une parenthèse.

4. On écrit le numérateur et le dénominateur sous la forme $a\,x+b$ ou sous la forme d'un produit de facteurs du type $a\,x+b$.

5. On étudie le signe du quotient obtenu à l'aide d'un tableau de signes. Pour chaque facteur de la forme $ax+b$ on détermine les valeurs charnières. On réalise le tableau de signes, en prenant bien soin de ranger les valeurs charnières dans l'ordre croissant, puis on place les 0 et ensuite on met **le signe de a à droite du 0.**

On indique **les conditions d'existence à l'aide d'une double barre.**

6. On donne l'ensemble des solutions S.
7. On teste éventuellement la réponse.
On prend pour cela une valeur de *x* (souvent 0) qui n'est pas une valeur charnière.
On regarde si cette valeur est ou non dans l'ensemble S. On remplace *x* par la valeur choisie dans l'inéquation initiale et on observe si elle est effectivement ou non une solution de l'inéquation.

II. ETUDE DE FONCTIONS.

1. Etudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle I.

Le sens de variation d'une fonction est donné par le signe de la dérivée, donc les trois étapes à suivre sont :

1. Calculer la dérivée à 'aide des formules…
2. Etudier le signe de la dérivée en réduisant au même dénominateur et en factorisant si besoin (ne pas hésiter à faire un tableau de signes et ne développer qu'en dernier recours)
3. Conclure en appliquant le principe de lagrange…

Attention : Ne pas confondre le sens de variation d'une fonction et le signe de f(x).

Exercice 3 : Remplir le tableau suivant_ u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur I :

Soit f la fonction définie par f(x) =	Alors la dérivée de f est définie par f '(x) :
f(x) = a (a $\in$ IR)	**f '(x) =**
f(x) = x	**f '(x) =**
f(x) = x^2	**f '(x) =**
f(x) = x^n où $n \geq 0$	**f '(x) =**
f(x) = $\frac{1}{x}$	**f '(x) =**
f(x) = $\frac{1}{x^n}$ où $n \geq 0$	**f '(x) =**
f(x) = $\sqrt{x}$	**f '(x) =**
f(x) = cos x	**f '(x) =**
f(x) = sin x	**f '(x) =**
f = a u (a $\in$ IR)	**f ' =**
f = $\frac{1}{u}$	**f ' =**
f= $\frac{u}{v}$	**f ' =**
f = u + v	**f ' =**
f = u^n	**f ' =**
f = uv	**f ' =**

Exercice 4 :
Etudier les variations de la fonction **a)** et donner le tableau de variations pour les fonctions suivantes :

a) f(x) = $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

b) f(x) = $\dfrac{2x^2+3x+2}{2x+3}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

d) $f(x)=3x-4-\dfrac{5}{3x-1}$

2. Etudier le signe d'une fonction.

1. On recherche le maximum ou le minimum de la fonction. Pour qu'il y ait un extremum, il suffit que la dérivée s'annule en changeant de signe.
2. On utilise si besoin le théorème des valeurs intermédiaires.
3. Graphiquement f est positive si et seulement si la courbe est au dessus de l'axe des abscisses, f est négative si et seulement si la courbe est en dessous de l'axe des abscisses.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{40x+30}{x^2+1}$ et C_f sa courbe représentative.

a) Calculer f '(x)et en déduire le tableau de variations de f
b) Montrer que, sur [-7 ;7], f admet un maximum et un minimum.
c) En déduire le signe de f(x) sur [-7 ;7].

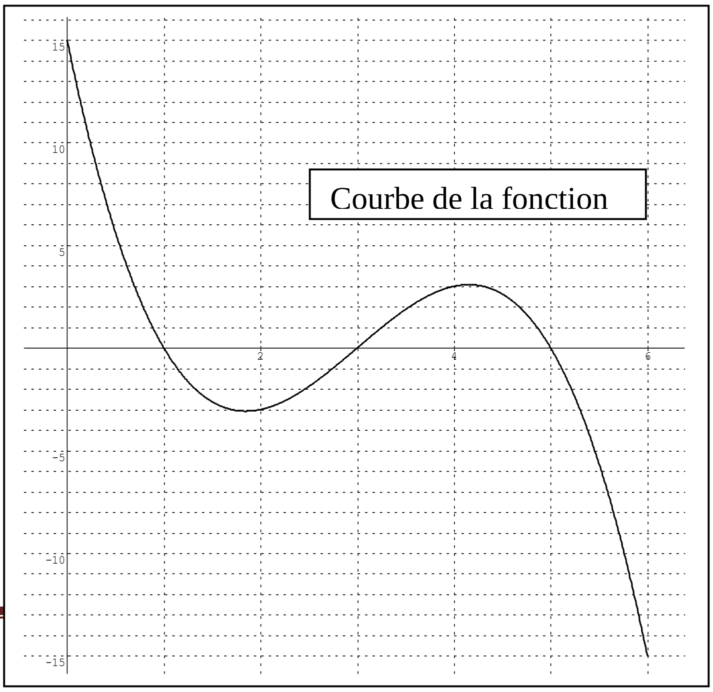
Exercice 6 :

Soit P la fonction polynôme définie sur [0 ; 6] par $\boxed{P(x) = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15}$

1°) a) Montrer que 1 est racine de P.
b) En déduire une factorisation de P(x) sous la forme P(x) = (x-1)Q(x) où Q(x) est une fonction polynôme du second degré.
c) Montrer alors que les trois racines de P sont 1 ; 3 et 5.

2°) Etudier le signe de P(x).

3°) On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction P, expliquer brièvement comment on peut retrouver les résultats de la question 2°).



3. Déterminer la tangente à une courbe.

1. L'équation de la tangente à une courbe Cf au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

On calcule donc f ' (a) et f (a) après avoir éventuellement calculé f '(x).

2. Le coefficient directeur d'une tangente à une courbe Cf au point d'abscisse a est f '(a).

Exercice 7 :

j est une fonction définie sur ℝ par $j(x) = (x^2 + 1)(-2x^3 + 3x - 7)$.

1. Calculer j '(x) pour tout réel x.
2. Déterminer une équation de la tangente à Cj au point d'abscisse 1.

Exercice 8 :

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$ Déterminer les coordonnées des points éventuels en lesquels la tangente à C_f a pour coefficient directeur 6.

4. Déterminer l'intersection ou la position relative des courbes C_f et C_g.

1. Si I est le point d'intersection des deux courbes, ses coordonnées doivent vérifier simultanément les deux équations donc ses coordonnées est le couple solution du système :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$ On est ramené à résoudre f(x) = g (x).

2. Etudier la position relative des deux courbes revient à étudier le signe de la différence f(x) – g(x) :

-- Si f(x) – g(x) < 0 alors f(x) < g(x) donc C_f se situe en dessous de C_g

-- f(x) – g(x) > 0 alors f(x) > g(x) donc C_f se situe au dessus de C_g

Exercice 9 :

La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
2. Calculer les coordonnées des points d'intersections de la courbe représentative de g avec les axes de coordonnées, puis avec la droite d d'équation y =1
3. Etudier le signe de g(x) et en déduire la position de la courbe avec l'axe des abscisses.
4. Résoudre l'inéquation g(x) > 1 et en déduire la position de la courbe par rapport à d.

Exercice 10 :

Soit f est une fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 8x$

1. Calculer f '(x) pour tout réel x.
2. Déterminer une équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0.

5. **Trouver un axe de symétrie ou un centre de symétrie pour une courbe** C_f.

1. Un axe de symétrie.

La droite x = a (a est un réel fixé) est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si et seulement si pour tout h $\in$ IR tel que a + h $\in D_f$, on a (a – h) $\in D_f$ et f(a-h)=f(a+h).

2. Un centre de symétrie.

Le point I(a ;b) est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f si et seulement si pour tout h $\in$ IR tel que a + h $\in D_f$: , on a (a – h) $\in D_f$ et (f(a-h)+f(a+h)) / 2 = b

Exercice 11 :

On considère la fonction g définie par6 $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

1. Donner son ensemble de définition.
2. Soit h un réel non nul. Exprimer en fonction de h g(2 + h) et g(2 – h) puis vérifier l'égalité : $\frac{g(2+h)+g(2-h)}{2} = 1$
3. En déduire que cette courbe a un centre de symétrie. Quelles sont les coordonnées de ce centre ?

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

1. Montrer que pour tout réel x, f(x) peut s'écrire sous la forme : $f(x) = 4 - (x-1)^2$. En déduire la forme factorisée de f(x).

2. Montrer que, pour tout réel h, on a :f(1 + h) = f(1 – h)

3. En déduire que la courbe de f admet un axe de symétrie.

FIN